ケステン分布とカタラン数の一般化

齋藤　正顕　(工学院大学)*

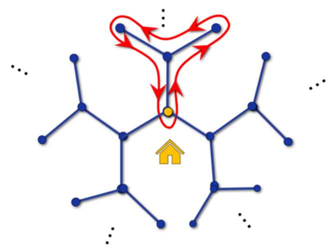

図 1: 次数 $q+1=3$ のベーテ格子上の長さ $k=6$ の閉道

ドレスト光子のダイナミクスを数学的に記述する方法の一つとして量子ウォークが期待を集めています [7, 8, 9]. また量子ウォークとも関わりが深い数学として量子確率論があります. 量子確率論の本 [4, 6] に, 次の Kesten 分布が定義されています.

正の実数 p, q が $p \leq 2q$ を満たすとき,

$$\rho(x) = \rho_{p,q}(x) := \begin{cases} 0, & \text{if} \quad |x| > 2\sqrt{q}, \\ \dfrac{p}{2\pi} \cdot \dfrac{\sqrt{4q-x^2}}{p^2-(p-q)x^2}, & \text{if} \quad |x| < 2\sqrt{q} \end{cases}$$

とおくと $\rho(x)dx$ は確率測度になり, 対応する分布を Kesten 分布といいます. 特に $p=q+1$ のとき, これは Kesten-McKay 分布と呼ばれ, 頂点数が発散するときの $(q+1)$ 次正則グラフの隣接行列の固有値の極限分布として現れます. また, $p=2$, $q=1$ のときは逆正弦測, $p=q+1$ かつ $q \to \infty$ のときの極限は Wigner の半円測（Sato–Tate 測）となり, 特別な場合として, 物理や整数論で現れる重要な分布を含んでいます. 我々は論文 [3] において, Kesten 分布のモーメント

$$M_k := \frac{p}{2\pi} \int_{-2\sqrt{q}}^{2\sqrt{q}} \frac{\sqrt{4q-x^2}}{p^2-(p-q)x^2}\, x^k\, dx, \quad (k=0,1,2,\dots)$$

を, カタラン数 $C_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} (k \geq 0)$ の 2 種類の拡張である Catalan's triangles $T_{k,i} = \frac{k-i+1}{k+1}\binom{k+i}{k}$ $(k \geq i \geq 0)$ と Shapiro's Catalan triangles $B_{k,j} = \frac{j}{k}\binom{2k}{k-j} (k \geq j \geq 1)$ で表しました. この 2 種類の数列に triangle とついている理由は, 二項係数の場合のパスカルの三角形のような漸化式を満たすからです. 1 つ目の応用として, $T_{k,i}$ と $B_{k,j}$ の新しい等式を得ました. これは Eplett [2] によるカタラン数の等式 $C_k = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j B_{k+1,j+1}$ の一般化になっています. 2 つ目の応用として, モーメント列 M_{2k} の $k \to \infty$ のときの漸近公式を得ました. これら論文 [3] の結果をまとめると次のようになります:

Theorem 1 ([3]) (1) $M_{2k} = p \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} T_{k-1,i}\, p^{k-1-i} q^i, \qquad (k \geq 1).$

*e-mail: `saito.seiken@cc.kogakuin.ac.jp`

(2) $M_{2k} = p \sum_{j=0}^{k-1} B_{k,j+1}(p-q)^j q^{k-1-j}, \qquad (k \geq 1).$

(3) $T_{k,k-i} = \sum_{j=i}^{k} B_{k+1,j+1} \binom{j}{i} (-1)^{j-i}, \qquad (0 \leq i \leq k).$

(4) $0 < p < 2q$ のとき, $\lim_{k\to\infty} \frac{k^{3/2}}{(2\sqrt{q})^{2k}} M_{2k} = \frac{pq}{\sqrt{\pi}(2q-p)^2}.$

さて, $p = q+1$ の場合に Kesten 分布のモーメントは

$$M_k = \frac{q+1}{2\pi} \int_{-2\sqrt{q}}^{2\sqrt{q}} \frac{\sqrt{4q-x^2}}{(q+1)^2 - x^2}\, x^k \, dx, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

となります. これは, 各頂点の次数が $q+1$ であるベーテ格子（正則木）という無限グラフの固定されたある頂点から出発し, その頂点に戻ってくる長さ k の閉道 (closed walk) の個数に等しくなります. 例えば, 図 1 は次数 3 のベーテ格子の長さ 6 の閉道の一例です. 長さが奇数の閉道の個数は 0 なので省略して, 長さ偶数の場合の最初の 10 個 M_{2k} $(k = 1, \dots, 10)$ を書くと

$$3, 15, 87, 543, 3543, 23823, 163719, 1143999, 8099511, 57959535$$

です. 長さ 6 の閉道は 87 個あります. ベーテ格子上でランダムウォークを考えると, 閉道の個数は出発点に戻ってくる確率と関係します.

Remark 1 (Sawyer(1978)) 次数が $q+1$ のベーテ格子上の等方的な離散時間ランダムウォークにおいて, ウォーカーが「時刻 $2k$ で出発点に戻ってくる確率」を $P_{2k}(O, O)$ とすると,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_{2k}(O,O) \cdot k^{3/2}}{\left(\frac{2\sqrt{q}}{q+1}\right)^{2k}} = C$$

となる定数 C が存在する ([10, Theorem 2]).

Theorem 1 の (4) で $p = q+1$ とします. $M_{2k} = (q+1)^{2k} P_{2k}(O, O)$ であるから, $C = \frac{(q+1)q}{\sqrt{\pi}(q-1)^2}$ であることが分かります. より一般的な結果として [11, Theorem (19.30)] があります.

ベーテ格子上の量子ウォークについては, 今野先生らの連続時間の場合 [5] と離散時間の場合 [1] についての研究があります. 離散時間の場合は, 時刻 t におけるウォーカーの位置を X_t としたとき X_t/t の極限分布の確率密度関数として, 今野分布の確率密度関数に類似した関数が現れます. この場合に, 上記の結果の類似が成り立つかどうか検討することは面白いと思います.

参考文献

[1] K. Chisaki, M. Hamada, N. Konno, E. Segawa, Limit theorems for discrete-time quantum walks on trees, Interdiscip. Inform. Sci. 15 (2009), no. 3, 423–429.

[2] W. J. R. Eplett, A note about the Catalan triangle, Discrete Math. 25 (1979), no. 3, 289–291.

[3] T. Hasegawa, S. Saito, A note on the moments of the Kesten distribution, Discrete Mathematics, 344, Paper No. 112524, 10 pp., 2021.

[4] A. Hora and N. Obata, *Quantum probability and spectral analysis of graphs. With a foreword by Luigi Accardi*, Theoretical and Mathematical Physics, Springer, Berlin, 2007. xviii+371 pp.

[5] N. Konno, Continuous-time quantum walks on trees in quantum probability theory, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 9 (2006), no. 2, 287–297.

[6] N. Obata, *Spectral analysis of growing graphs*, A quantum probability point of view. SpringerBriefs in Mathematical Physics, 20. Springer, Singapore, 2017. viii+138 pp.

[7] M. Ohtsu, A quantum walk model for describing the energy transfer of a dressed photon, 2021, Available at `https://rodrep.or.jp/en/img/off-shell/2021/2109R.001.v1.pdf`

[8] M. Ohtsu, E. Segawa, K. Yuki, A quantum walk model for the energy transfer of a dressed photon, Proceedings of "2022 International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA 2022)," 65–68.

[9] M. Ohtsu, E. Segawa, K. Yuki, S. Saito, Spatial distribution of dressed-photon-phonon confined by an impurity atom-pair in a crystal, 2023, Available at `https://rodrep.or.jp/en/off-shell/original_2301O.001.v1.html`

[10] S. Sawyer, Isotropic random walks in a tree, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 42 (1978), no. 4, 279–292.

[11] W. Woess, *Random walks on infinite graphs and groups*, Cambridge Tracts in Mathematics, 138. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. xii+334 pp.